10-й класс

1. Можно ли найти натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_{2012}$, среди которых нет двух одинаковых, так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_{2012}}=1?$$

Ответ: можно.

Решение.

Например, можно поступить следующим образом:

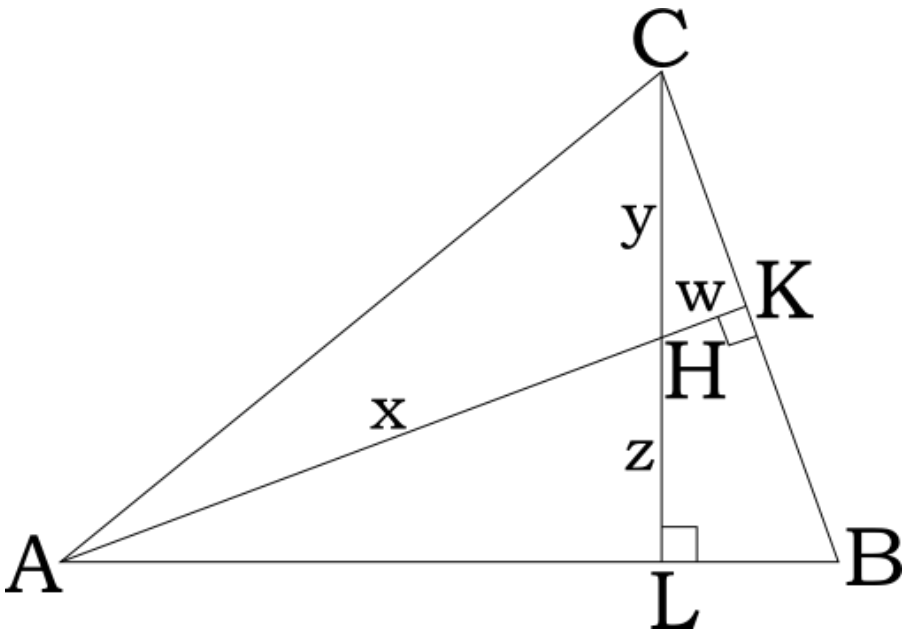
$$\begin{aligned}1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2^{2010}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2009}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2^{2009}}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{3\cdot 2^{2009}}+\frac{1}{6\cdot 2^{2009}}.\end{aligned}$$

2. Докажите, что если в остроугольном треугольнике все его высоты делятся точкой их пересечения в одном и том же отношении (считая, как обычно, от вершин треугольника), то треугольник равносторонний.

Решение.

В самом деле, из подобия треугольников (см. рис.) ALH и CKH получаем

$$\frac{z}{x}=\frac{w}{y},$$



а из условия задачи следует, что

$$\frac{y}{z} = \frac{x}{w}.$$

Из этих равенств легко получается, что $x = y$, то есть треугольник ACH — равнобедренный, откуда следует, что и треугольник ABC также равнобедренный. Отсюда уже следует утверждение задачи.

3. Положительные числа a, b и $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ рациональны. Доказать, что числа $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[3]{b}$ также рациональны.

Решение.

Обозначим $\sqrt[3]{a} = x,\ \sqrt[3]{b} = y$. Из $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ получаем xy рационально. Итак, получаем

$$\begin{cases} x + y = r \\ xy = q \end{cases},$$

где q, r рациональны. Тогда $x = r_1 + \sqrt{q_1}$, причём r_1, q_1 рациональны.

Наконец, $a = x^3 = r_1^3 + 3r_1^2\sqrt{q_1} + 3r_1 q_1 + \sqrt{q_1}q_1$, так что $\sqrt{q_1}$ — число рациональное, а вместе с ним — x и y.

4. Существуют ли такие натуральные числа m и n, что

$$\frac{m}{n}+\frac{n+1}{m}=4?$$

Ответ: нет.

Решение.

Пусть натуральные m и n удовлетворяют уравнению

$$m^2+n^2+n=4mn.$$

Пусть наибольший общий делитель $(m,\ n)=k$. Тогда $m=km_1,\ n=kn_1$, $(m_1,\ n_1)=1$. Получаем

$$k^2m_1^2+k^2n_1^2+kn_1=4k^2m_1n_1,$$

$$km_1^2+kn_1^2+n_1=4km_1n_1.$$

Из $(m_1,\ n_1)=1$ получаем тогда $k=k_1n_1$, откуда

$$k_1n_1m_1^2+k_1n_1n_1^2+n_1=4k_1n_1m_1n_1,$$

$$k_1m_1^2+k_1n_1^2+1=4k_1m_1n_1.$$

Отсюда $k_1=1$ и

$$m_1^2+n_1^2+1=4m_1n_1.$$

Последнее равенство противоречиво (правая часть делится на 4, а левая — нет).

5. 2013 цифр выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 2013-значное число (в широком смысле — несколько первых цифр могут быть и нулями) делится на 27. Доказать, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

Решение.

Заметив, что $1000 = 999 + 1 = 9 \cdot 111 + 1 = 9 \cdot 3 \cdot 37 + 1 = 27 \cdot 37 + 1$ даёт при делении на 27 остаток 1, делаем вывод, что натуральное число $n = \overline{\ldots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ делится на 27 в том и только в том случае, если число $f(n) = \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \cdots$ делится на 27. Покрасим все цифры по кругу в три цвета: красный, жёлтый, зелёный, красный, жёлтый, зелёный,…, красный, жёлтый, зелёный (2013 делится на 3). Сумму красных цифр обозначим a, сумму жёлтых — b, а сумму зелёных — c. Допустим, что первое прочтение, в результате которого получилось делящееся на 27 число n, начиналось с красной цифры. Тогда число $f(n) = 100a + 10b + c$ также делится на 27. Если начать читать с жёлтой цифры, то для нового числа m получим $f(m) = a + 100b + 10c$. Разность $f(n) - f(m) = 99a - 90b - 9c = 18a + 18b + 18c + 81a - 108b - 27c = 2 \cdot 9(a + b + c) + 27(3a - 4b - c)$ делится на 27, поскольку $a + b + c$ делится на 3. Тогда $f(m)$ делится на 27, и m делится на 27. В случае зелёной цифры $f(m) = 10a + b + 100c$, и $f(n) - f(m) = 90a + 9b - 99c = -18a - 18b - 18c + 108a + 27b - 81c = -18(a + b + c) + 27(4a + b - 3c)$ опять делится на 27 с тем же результатом.

6. В $3n$ клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлены нули, а в остальных — единицы. Докажите, что все нули можно удалить, вычеркнув n строк и n столбцов.

Решение.

Для каждой расстановки $3n$ нулей A определено число $N(A)$ — наименьшее число строк и столбцов, которые нужно вычеркнуть, чтобы удалить все нули расстановки A. Допустим, что у данной расстановки A найдётся столбец (скажем, с номером k), не содержащий нулей. Рассмотрим любой столбец (с номером l), содержащий не менее 2-х нулей (такой найдётся, поскольку столбцов $2n$ штук, а нулей — $3n$ штук). Возьмём любой нуль из столбца с номером l (предположим, что он лежит в строке с номером m) и переместим его в столбец с номером k (строка та же), получая таким образом новую расстановку B. Покажем, что $N(A) \leq N(B)$. Предположим противное: $N(B) < N(A)$. Вычеркнем $N(B)$ строк и $N(B)$ столбцов расстановки B, удаляя из неё все нули. Если перемещённый нуль удаляется вычёркиванием строки с номером m, то переместим его обратно, восстанавливая расстановку A, для удаления нулей которой потребовалось таким образом вычёркивание $N(B)$ строк и $N(B)$ столбцов, что даёт $N(A) \leq N(B)$ — противоречие с предположением. Если же перемещённый нуль удаляется вычёркиванием

столбца с номером k, то опять восстанавливаем A, отменяем вычёркивание столбца с номером k и вычёркиваем -й столбец (или оставляем всё как есть, если l-й столбец уже вычеркнут). Эта операция оставляет все нули удалёнными, поскольку перемещённый нуль был в столбце с номером k единственным. Снова получаем $N(A) \leq N(B)$, то есть противоречие. Итак, $N(A) \leq N(B)$. Продолжая действовать таким образом, мы получим расстановку C, в которой нет свободных от нулей столбцов и для которой $N(A) \leq N(C)$. Для удаления нулей расстановки C достаточно вычёркивания n строк и n столбцов: сначала можно вычеркнуть все столбцы, содержащие более одного нуля (таких столбцов не более n), довести число вычеркнутых столбцов до n (удалённых нулей уже не менее $2n$), а с уцелевшими нулями (их не более n) можно расправиться с помощью n строк. В итоге $N(A) \leq N(C) \leq n$, что и требовалось.